

Über die Stabilitätsbedingung der Elektronenbewegung im Rheotron¹

Von RICHARD GANS

Aus dem Institut für theoretische Physik der Universität München

(Z. Naturforschg. 1, 485—487 [1946]; eingegangen am 4. Juli 1946)

Es werden die notwendigen Bedingungen für die Verteilung des Feldes im Rheotron angegeben [Gl. (12) und (13)], damit die Elektronenbewegung stabil ist. Diese Bedingungen beziehen sich nicht nur auf die unmittelbare Umgebung des Gleichgewichtskreises, sondern auf ein endliches Raumgebiet.

Das Rheotron dient dazu, Elektronen auf sehr hohe Geschwindigkeiten zu bringen. Die dazu nötigen Beschleunigungen werden durch die elektrischen Wirbelfelder erzeugt, welche zeitlich veränderliche magnetische Kraftlinien umzingeln. Die Versuchsanordnung besteht demgemäß in einem Wechselstrom-Elektromagneten, dessen Feld Rotationssymmetrie hat, so daß die elektrischen Feldlinien in Kreisen um die Magnetachse verlaufen. Will man die Elektronen auch nur auf 2 M Volt bringen, so legen diese in einer Viertelperiode des Feldverlaufs einen Weg von etwa 130 km zurück, vorausgesetzt, daß die Frequenz des Magnetisierungsstroms 500 Hz beträgt, und diese 130 km, indem etwa ein Kreis von 7 cm Radius $3 \cdot 10^5$ -mal durchlaufen wird. Bei diesem mit rasender Geschwindigkeit durchheilten Wege liegt die Gefahr vor, daß die Elektronen von ihrer Bahn abirren und an die Gefäßwände geraten, ohne nutzbar gemacht zu werden. Das kann nur vermieden werden, wenn bei Ablenkungen der Elektronen vom vorgeschriebenen Kreise sofort Kräfte ins Spiel treten, die sie wieder auf diesen Kreis zurückzubringen streben, d.h. wenn die Bewegung stabil ist.

Eine Stabilitätsbedingung ist von M. Steenbeck² aufgestellt und später von D. W. Kerst und R. Serber³ ebenfalls abgeleitet worden, aber nur für den Fall, daß das betrachtete System unendlich wenig von seiner Gleichgewichtsbahn abgewichen ist, sie erfüllt also nur die bescheidenste Forderung, die man stellen kann. Demgegenüber wollen wir die Bedingung der Stabilität für ein endliches Raumgebiet angeben.

Die Kraft F auf ein Elektron setzt sich aus der

Kraft des elektrischen Feldes $e \mathfrak{E}$ und der Biot-Savartschen Kraft $\frac{e}{c} [\mathbf{v}, \mathfrak{H}]$ zusammen. Führen wir Zylinderkoordinaten mit der Magnetachse als z -Achse und mit der Mittelebene zwischen den Magnetpolen als r, φ -Ebene ein, so gilt mit Berücksichtigung der Symmetrieverhältnisse

$$F_r = \frac{e}{c} r \dot{\varphi} H_z \quad (1a)$$

$$F_\varphi = e E_\varphi + \frac{e}{c} (\dot{z} H_r - \dot{r} H_z) \quad (1b)$$

$$F_z = -\frac{e}{c} r \dot{\varphi} H_r. \quad (1c)$$

Die Bewegungsgleichungen lauten dementsprechend

$$\frac{d}{dt} (m \dot{r}) = m r \dot{\varphi}^2 + F_r \quad (2a)$$

$$\frac{d}{dt} (m r^2 \dot{\varphi}) = r F_\varphi \quad (2b)$$

$$\frac{d}{dt} (m \dot{z}) = F_z. \quad (2c)$$

In Gl. (2a) steht rechts neben der eigentlichen Kraft natürlich noch die Zentrifugalkraft; Gl. (2b) drückt aus, daß die Zunahme des Drehimpulses in der Zeiteinheit gleich dem Drehmoment ist.

In diesen Gleichungen ist

$$m = m_0 / \sqrt{1 - v^2/c^2}, \quad (3)$$

wo m_0 die Ruhmasse bedeutet.

Zur Umformung der Gleichungen (2) denken wir uns durch das Elektron einen Kreis gelegt, dessen Ebene senkrecht zur Magnetachse steht, und dessen Mittelpunkt auf der Magnetachse liegt.

¹ Die Arbeit ist im Laboratorium von Dr. Heinz Schmellenmeier, Berlin, entstanden.

² D.R.P. 656378 vom 1. 4. 1933.

³ Physic. Rev. 60, 53 [1941].



Den magnetischen Fluß durch diesen Kreis nennen wir Φ , so daß

$$\Phi = 2\pi \int_0^r H_z r dr \quad (4)$$

und daraus

$$r H_z = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial \Phi}{\partial r}. \quad (5a)$$

Drückt man aus, daß aus dem unendlich flachen Zylinder vom Radius r und der Höhe dz im ganzen wegen der Quellenfreiheit der magnetischen Induktion keine Induktionslinien herauskommen, so gilt

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} dz + 2\pi r dz \cdot H_r = 0;$$

hier ist der erste Term die Anzahl Induktionslinien, die aus den Stirnflächen des Zylinders herauskommen, der zweite die durch die Mantelfläche von innen nach außen hindurchtretenden. Daraus folgt

$$r H_r = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \quad (5b)$$

und schließlich gilt nach der zweiten Maxwell'schen Gleichung

$$r E_\varphi = -\frac{1}{2\pi c} \frac{\partial \Phi}{\partial t}. \quad (5c)$$

Setzen wir die Werte (5a, b, c) und (1b) in (2b) ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (m r^2 \dot{\varphi}) &= -\frac{e}{2\pi c} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial r} \dot{r} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \dot{z} \right) \\ &= -\frac{e}{2\pi c} \frac{d\Phi}{dt} \end{aligned}$$

und daraus das Integral

$$m r^2 \dot{\varphi} + \frac{e}{c} \left(\frac{\Phi}{2\pi} - C \right) = 0. \quad (6)$$

Durch Einsetzen von (1a) in (2a) ergibt sich rechts $\dot{\varphi} (m r \dot{\varphi} + \frac{e}{c} r H_z)$; benutzt man noch (6), um hieraus $\dot{\varphi}$ zu eliminieren, so folgt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (m \dot{r}) &= -\frac{e^2}{c^2 m r} \left(\frac{\Phi}{2\pi} - C \right) \\ &\quad \cdot \left(H_z - \frac{\Phi}{2\pi r^2} + \frac{C}{r^2} \right). \quad (7) \end{aligned}$$

Schließlich ergibt sich aus (2c) mittels (1c) und Benutzung von (6)

$$\frac{d}{dt} (m \dot{z}) = \frac{e^2}{c^2 m r} \left(\frac{\Phi}{2\pi} - C \right) H_r. \quad (8)$$

Für die Bewegung auf einem Kreise ($\dot{r}=0$), die letzten Endes angestrebt wird, muß eine der beiden Klammern in (7) verschwinden. Die erste kann es nicht, da C eine Konstante ist, während Φ , ebenso wie H , den Faktor $\sin \omega t$ hat. Also muß die zweite Klammer verschwinden. Wegen des soeben erwähnten Faktors $\sin \omega t$ bei H und Φ müssen deshalb einzeln

$$H_z = \frac{\Phi}{2\pi r^2} \quad (9)$$

$$C = 0 \quad (10)$$

sein. (9) ist die von R. Wideröe⁴ zuerst formulierte Gleichgewichtsbedingung, während die Bedingung (10) aus (6)

$$m r v = -\frac{e}{c} \frac{\Phi}{2\pi}$$

und mit Hinzuziehung von (9)

$$v = -\frac{e}{m c} H_z r \quad (11)$$

macht, d.h. die bekannte Gleichgewichtsbedingung zwischen der Zentrifugalkraft und der Biot-Savartschen Kraft.

Gl. (10) ist die für dieses Gleichgewicht nötige Bedingung. Wir wollen sie die Bedingung für richtigen Start in tangentialer Richtung nennen. Mit ihr wird aus (6), (7), (8)

$$m r^2 \ddot{\varphi} + \frac{e}{c} \frac{\Phi}{2\pi} = 0, \quad (6')$$

$$\frac{d}{dt} (m \dot{r}) = -\frac{e^2}{c^2 m r} \frac{\Phi}{2\pi} \left(H_z - \frac{\Phi}{2\pi r^2} \right) \quad (7')$$

$$\frac{d}{dt} (m \dot{z}) = +\frac{e^2}{c^2 m r} \frac{\Phi}{2\pi} H_r. \quad (8')$$

Nach (7') muß bei positivem Φ sein

$$\text{für } r \geq r_0: H_z - \frac{\Phi}{2\pi r^2} \geq 0, \quad (12)$$

wo r_0 der Radius des Gleichgewichtskreises ist. Dann nimmt die radiale Impulskomponente ab, wenn $r > r_0$, zu, wenn $r < r_0$ ist, d.h. die Beschleunigung ist in dem ganzen endlichen Raumgebiet, in dem (12) gilt, stets nach dem Gleichgewichtskreise hin gerichtet. Ferner muß wegen (8') sein

$$\text{für } z \geq 0: H_r \leq 0, \quad (13)$$

denn dann ist die axiale Beschleunigung in dem ganzen endlichen Gebiet, in dem (13) gilt, stets

⁴ Aachener Dissertat. 1927; Arch. Elektrotechnik 21, 387 [1928].

nach der Mittelebene $z=0$ zwischen den Polschuhen gerichtet. (13) bedeutet aber einfach, daß die Kraftlinien die durch die Figur angedeutete Krümmung haben müssen.

Die Gleichungen (7') und (8') lassen sich mit Benutzung von (5a) und (5b) auf eine noch einfachere Form bringen. Danach ist

$$H_z - \frac{\Phi}{2\pi r^2} = \frac{1}{2\pi r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{\Phi}{2\pi r^2} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\Phi}{2\pi r} \right)$$

und

$$H_r = - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\Phi}{2\pi r} \right).$$

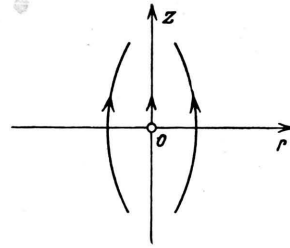
So wird

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (m \dot{r}) &= - \frac{e^2}{c^2 m} \frac{\Phi}{2\pi r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\Phi}{2\pi r} \right), \\ \frac{d}{dt} (m \dot{z}) &= - \frac{e^2}{c^2 m} \frac{\Phi}{2\pi r} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\Phi}{2\pi r} \right). \end{aligned} \quad (14)$$

Die Kraft leitet sich also aus einem Potential

$$U = \frac{e^2}{2 c^2 m} \left(\frac{\Phi}{2\pi r} \right)^2 \quad (15)$$

ab, wobei aber zu beachten ist, daß U von t abhängt; demzufolge existiert kein Energieintegral der Bewegungsgleichungen (14).



Durch U ausgedrückt, lautet die Stabilitätsbedingung, daß in dem ganzen endlichen Gebiet Stabilität stattfindet, in dem $U > U_0$ ist, wo U_0 der Wert von U auf dem Gleichgewichtskreise ($r=r_0$; $z=0$) bedeutet.

Der Vorteil dieser Form der Stabilitätsbedingung ist, daß sich durch Ausmessung des Induktionsflusses Φ die ganze Potentialmulde bestimmen läßt und etwaige Mängel durch Veränderung des Polschuhprofils verbessert werden können, während die Bedingungen (12) und (13) direkt die Wideröesche Gleichgewichtsbedingung und durch Entwicklung nach Taylor in der Nähe des Gleichgewichtskreises die Steenbeckschen Stabilitätsbedingungen als Spezialfall ergeben.

Beugung elektromagnetischer Zentimeterwellen an metallischen Blenden

VON HANS SEVERIN.

Aus dem Institut für angewandte Elektrizität der Universität Göttingen

(Z. Naturforschg. 1, 487—495 [1946]; eingegangen am 26. April 1946)

Mit Hilfe des für Hertz'sche Wellen formulierten Huyghens-Fresnel'schen Prinzips können die auf der Mittelnormalen einer kreisförmigen Blende beobachteten Beugungserscheinungen auch im Nahfeld der Öffnung quantitativ richtig beschrieben werden. Es wird gezeigt, daß dieser Ansatz mit der Kirchhoff'schen Theorie der Beugung verträglich ist und die Maxwell'schen Gleichungen erfüllt.

Infolge der raschen Entwicklung der Ultrakurzwellentechnik sind in den letzten Jahren zunehmend Beugungs- und Interferenzerscheinungen von elektromagnetischen Dezimeter- und Zentimeterwellen beobachtet worden¹, die sich mit den für entsprechende Versuche der Lichtoptik berechneten allgemein geläufigen Formeln der klas-

sischen Beugungstheorie nicht mehr darstellen lassen. Dort ist die Entfernung des Beobachtungsortes vom beugenden Hindernis immer sehr groß gegen die Wellenlänge λ , und häufig trifft das auch für die Dimensionen des Hindernisses selbst zu. Die bekannten Beugungsformeln sind Näherungen für diesen Fall.

Beim Experimentieren mit Ultrakurzwellen dagegen haben die Hindernisse im allgemeinen etwa dieselbe Größe wie λ , und sehr oft interessiert ihr Einfluß auf das Wellenfeld in ihrer nächsten Um-

¹ W. Seiler, Jb. drahtl. Telegr. 37, 79 [1931]; W. Hübner, Arch. Elektrotechn. 28, 468 [1934]; K. Erler, Hochfrequenz-Techn. u. Elektroakust. 56, 104 [1940].